あるマーケットゲームについて(最適化の数理とその応用)

寺岡, 義伸; 千葉, 睦朗

数理解析研究所講究録
835巻 1993年 70-80

あるマーケットゲームについて

大阪府大・総科　寺岡義伸 (Yoshinobu Teraoka)
大阪府大・総科　千葉睦朗 (Mutsuro Chiba)

1. 序論

ここで取扱う問題は，ある商品に対して市場を複占している企業間の対立をある側面からモデル化し，2人非0和ゲームとしての解を求めようとするものである。

ある品物で市場を複占している2企業 (Player I, II) がこの市場の独占を目的として対立している。両者は，ある与えられた有限区間 $[0, r]$ のどの時点までこの対立でのにらみ合いを持続すべきかを決めなければならない。より長く頑張った方が勝ちでありこの市場の価値 V を手に入れることができる。先に断念した方は何も手に入らない。しかしながら，このにらみ合いを時刻 $t \in [0, r]$ まで維持するためには I, II はそれぞれ $h_1(t)$, $h_2(t)$ のコストを費やさなければならない。ここで，にらみ合いというのは，新しい型の製品の開発研究であるかもしれないし，小売店への売り込み競争であるかも

しれない。そこで $h_i(t)$ は $h_i(0)=0$ で微分可能かつ $h_i'(t)>0$ for $t\in(0,\delta)$ であると仮定する $(i=1,2)$。そして，もし両者が共に δ より前の同時刻でにらみ合いを断念しそれを相手に通告したときにはこの V を I と II はそれぞれ $p:q$ の比で分け合い，両者共上限の δ まで断念しなかったときは決戦となる。決戦となった場合，勝者は価値 V を手に入れることができるが，敗者は価値 C を失うこととなる。I が勝つ（II が負ける）確率は p であり，II が勝つ（I が負ける）確率は q である。ここに $p>0$，$q>0$ かつ $p+q=1$ である。両者は互に相手の停止時刻を考えに入れた上での最適停止時刻を決定しなければならない。

このような問題にあっては，両プレーヤにとって利用できる情報様式に2つの型がある。両者共相手の行動が常に観測できどの時刻においても相手がまだ頑張っているのかもう既に断念してしまっているのかが情報として知らされる場合を，Noisy 型と呼ぶ。反対に両者は互に自分の行動を相手に観測されない状態にしており，そのため何の情報もない中で $[0,\delta)$ のどの時点まで頑張るかをあらかじめ決定し，自分の決定した計画時間が実現されてみてはじめて既に相手が断念してしまっていたのかあるいはまだ頑張っているのかが知らされる。その上両者共上限の δ まで頑張っていた時は δ でそのことを

知り決戦に突入せざるを得ない場合を Silent 型と呼ぶ。

Noisy 型のゲームについては既に解決済みであるので，ここでは未解決の Silent 型の一般モデルについて取扱う[1]．

2．定式化と解析

前節のモデルに対して，Player I，II の純戦略をそれぞれ $x\in[0,r]$；$y\in[0,r]$ とし，利得関数をそれぞれ $M_1(x,y)$；$M_2(x,y)$ とすると

$$(1)\quad M_1(x,y)=\begin{cases}-h_1(x), & x<y\\ pV-h_1(x), & x=y<r\\ pV-qC-h_1(r), & x=y=r\\ V-h_1(x), & x>y\end{cases};$$

$$(2)\quad M_2(x,y)=\begin{cases}-h_2(y) & y<x\\ qV-h_2(y) & y=x<r\\ qV-pC-h_2(r), & y=x=r\\ V-h_2(y), & y>x\end{cases},$$

を得る．このゲームに対しては純戦略の中に平衡戦略は存在しない．そこで cdfs on $[0,r]$ の $F(x)$ と $G(y)$ をそれぞれ Player I，II の混合戦略とし，以下のように規定されたクラスの中から平衡戦略を導き出すこととする：

I の混合戦略 $F(x)$ は，点 $x=0$ での mass part $\alpha_0\geqq 0$，区間 $(0,u)$ 上での density part $f(x)\geqq 0$，および点 u での

mass part $\beta_u \geqq 0$ とで構成される．IIの混合戦略 $G(y)$ は，点 $y=0$ での mass part $\beta_0 \geqq 0$，区間 $(0, u)$ 上での density part $g(y) \geqq 0$，および点 u での mass part $\beta_u \geqq 0$ とで構成される．ここに，$0 < u \leqq r$ とする．

すなわち，両者共 $[0, u] \subset [0, r]$ 部分にのみ努力（確率）を配分するというクラスの中に平衡戦略が見つかるとする。そうすると，$M_i(F, y) = \int_0^r M_i(x, y)\, dF(x)$ とおくと，

$$M_2(F, y) = \begin{cases} \alpha_0 g V, & y = 0 \\ V\{\alpha_0 + \int_0^y f(x)dx\} - h_2(y), & 0 < y < u \\ V\{\alpha_0 + \int_0^u f(x)dx\} + \alpha_u g V - h_2(u), & y = u < r \\ V - h_2(y), & u < y < r \\ V\{\alpha_0 + \int_0^r f(x)dx\} + \alpha_u(gV - pC) - h_2(r), & y = u = r \end{cases}$$

が得られる．$M_2(F, y) =$ 一定 for all $y \in (0, u)$ として

(3) $\qquad f(t) = h_2'(t) / V, \qquad 0 < t < u$

が得られ，このような density part をもつ cdf $F(x)$ に対して

$$(4) \quad M_2(F, y) = \begin{cases} \alpha_0 g V, & y = 0 \\ \alpha_0 V, & 0 < y < u \\ \alpha_0 V + \alpha_u g V, & y = u < r \\ V - h_2(y), & u < y < r \\ \alpha_0 V + \alpha_r (gV - pC), & y = u = r \end{cases}$$

が成立する．まったく同様にして

(5) $g(t) = h_1'(t)/V, \quad 0 < t < u,$

(6) $$M_1(x,G)=\begin{cases}\beta_0 pV, & x=0\\ \beta_0 V, & 0<y<u\\ \beta_0 V+\beta_u pV, & x=u<r\\ V-h_1(x), & u<x<r\\ \beta_0 V+\beta_r(pV-qC), & x=u=r.\end{cases}$$

そこで今，$u_1 = h_2^{-1}(V)$; $u_2 = h_1^{-1}(V)$ と選び

$$r < \min(u_1, u_2), \quad r \geqq \min(u_1, u_2)$$

の2つの場合について考える．また，$u_1 \leqq u_2$，さらに $p \geqq \frac{1}{2}$ すなわち $p \geqq q$ を仮定する．

2・1．$r \geqq \min(u_1, u_2)$ の場合．$u = u_1 \leqq u_2$ とすると，$\alpha_0 = \alpha_u = 0$ となり，したがって

(7) $F^0(x) = h_2(x)/V, \quad 0 \leqq x \leqq u$

となって

$$M_2(F^0, y) = \begin{cases} 0, & 0 \leqq y \leqq u \\ V - h_2(y) < 0, & y > u. \end{cases}$$

Player I が $F^0(x)$ をとる限り，II は $[0, u]$ 内の y に限定されてしまうことになる．そこで

(8) $$G^0(y) = \begin{cases} h_1(y)/V + \beta_u I_u(y), & 0 \leqq y \leqq u \\ 1, & y > u \end{cases}$$

と選ぶと

$$(9)\quad \begin{cases} M_2(F^0, G) \leqq M_2(F^0, G^0) = 0 \\ M_1(F^0, G^0) = 0 \end{cases}$$

が成立する。

2・2. $r < \min(u_1, u_2)$ の場合。この時 (5), (6) は

$$(10)\quad \begin{cases} M_2(F, y) = \begin{cases} \alpha_0 q V, & y = 0 \\ \alpha_0 V, & 0 < y < r; \\ \alpha_0 V + \alpha_r (qV - pC), & y = r \end{cases} \\ M_1(x, G) = \begin{cases} \beta_0 p V, & x = 0 \\ \beta_0 V, & 0 < x < r \\ \beta_0 V + \beta_r (pV - qC), & x = r, \end{cases} \end{cases}$$

となり，したがって (3) と (4) を density parts に持つ cdf の F と G に対して

$$(12)\quad \begin{cases} M_2(F, G) = \alpha_0\{\beta_0 qV + (1-\beta_0)V\} + \alpha_r \beta_r (qV - pC) \\ M_1(F, G) = \beta_0\{\alpha_0 pV + (1-\alpha_0)V\} + \beta_r \alpha_r (pV - qC) \end{cases}$$

が成立する。上記の2つの式を観察すると，$\alpha_0, \beta_0, \alpha_r, \beta_r$ を決定することは，次の3×3双行列ゲームにおける平衡点を求めることと同じであることがわかる。このゲームの混合戦略は I にとっては $\langle \alpha_0, 1-\alpha_0-\alpha_r, \alpha_r \rangle$ であり，II には $\langle \beta_0, 1-\beta_0-\beta_r, \beta_r \rangle$

I ＼ II	$y=0$	$0<y<r$	$y=r$
$x=0$	pV, qV	$0, V$	$0, V$
$0<x<r$	$V, 0$	$0, 0$	$0, 0$
$x=r$	$V, 0$	$0, 0$	$pV-qC, qV-pC$

である．そして

$$1-\alpha_0-\alpha_r=h_2(r)/V \quad ; \quad 1-\beta_0-\beta_r=h_1(r)/V$$

の関係をもつ．さらに上記の 3×3 双行列ゲームを解くためには，次の 2×2 双行列ゲームを解くことがヒントとなる．

(13)

I ＼ II	$y=0$	$y=r$
$x=0$	$pV,\ qV$	$0,\ V$
$x=r$	$V,\ 0$	$pV-qC,\ qV-pC$

補題．2人非0和ゲーム(13)の平衡点と対応する平衡値は以下のようになる．

(i) $0<\dfrac{C}{V}\leqq\dfrac{q}{p}$ の場合，平衡点は $(\langle 0,1\rangle,\langle 0,1\rangle)$ であり，対応する平衡値は

$$M_1(\langle 0,1\rangle,\langle 0,1\rangle)=pV-qC \quad ; \quad M_2(\langle 0,1\rangle,\langle 0,1\rangle)=qV-pC$$

となる．

(ii) $\dfrac{q}{p}<\dfrac{C}{V}\leqq\dfrac{p}{q}$ の場合，平衡点は $(\langle 0,1\rangle,\langle 1,0\rangle)$ であり，対応する平衡値は

$$M_1(\langle 0,1\rangle,\langle 1,0\rangle)=V \quad ; \quad M_2(\langle 0,1\rangle,\langle 1,0\rangle)=0$$

となる．

(iii) $\dfrac{C}{V}>\dfrac{p}{q}$ の場合，平衡点は $(\langle 0,1\rangle,\langle 1,0\rangle),(\langle 0,1\rangle,\langle 1,0\rangle)$,

$$\left(\left\langle \frac{pC-qV}{pV+(pC-qV)},\ \frac{pV}{pV+(pC-qV)}\right\rangle,\left\langle \frac{qC-pV}{qV+(qC-pV)},\ \frac{qV}{qV+(qC-pV)}\right\rangle\right)$$ の

の3通りがあり，それらに対応する平衡値の対は，それぞれ

$(V, 0)$, $(0, V)$, かつ $\left(\frac{pV(qC-pV)}{qV+(qC-pV)}, \frac{qV(pC-qV)}{pV+(pC-qV)}\right)$ となる．▨

注：(13)で示されたゲームは，ハト・タカゲームである[1]．

上述の補題を使うことにより，点 $x=0$ での mass part α_0 が定まり，α_r も決定できる．同様にして $y=0$ での mass part β_0，および β_r も決定できる．

3. 主要結果

以上の考察を深く発展させると，次の定理としてまとめられる．以下 $p \geqq \frac{1}{2}$ を仮定する．

定理　$u_1 = h_2^{-1}(V)$；$u_2 = h_1^{-1}(V)$ とし，$u = \min(u_1, u_2)$ とせよ．そうすると，2人非0和ゲーム(2)，(3)に対して以下の事柄が成立する．

(i)　$r \geqq u$ の場合．

$$F^0(x) = \begin{cases} \{h_2(x)/V\} + [1 - \{h_2(u)/V\}] I_u(x), & 0 \leqq x \leqq u \\ 1, & u < x \leqq r \end{cases};$$

$$G^0(y) = \begin{cases} \{h_1(y)/V\} + [1 - \{h_1(u)/V\}] I_u(y), & 0 \leqq y \leqq u \\ 1, & u < y \leqq r \end{cases}$$

とせよ．そうすると，$u_1 \leqq u_2$ に対しては

$$\begin{cases} M_1(F^0, G^0) = 0 \\ M_2(F^0, G) \leqq M_2(F^0, G^0) = 0 \end{cases}$$

が成立し，逆に $u_2 \leqq u_1$ に対しては

$$\begin{cases} M_1(F^0, G) \leqq M_1(F^0, G^0) = 0 \\ M_2(F^0, G^0) = 0 \end{cases}$$

が成立する．$I_u(z)$ は $z = u$ での unit-step function。

(ii) $r < u$ の場合．まず Player I の混合戦略として

$$F^0(x) = \{h_2(x)/V\} + [1 - \{h_2(r)/V\}] I_r(x), \quad 0 \leqq x \leqq r$$

$$F^1(x) = 1, \quad 0 \leqq x \leqq r$$

$$F^*(x) = \begin{cases} \dfrac{pC - qV}{pV + (pC - qV)}, & x = 0 \\ \dfrac{(pC - qV) + pV\left[\dfrac{h_2(x)}{V} + \left\{1 - \dfrac{h_2(r)}{V}\right\} I_r(x)\right]}{pV + (pC - qV)}, & 0 < x \leqq r \end{cases}$$

を与える．次に Player II の混合戦略として

$$G^0(y) = \{h_1(y)/V\} + [1 - \{h_1(r)/V\}] I_r(y), \quad 0 \leqq y \leqq r$$

$$G^1(y) = 1, \quad 0 \leqq y \leqq r$$

$$G^*(y) = \begin{cases} \dfrac{qC - pV}{qV + (qC - pV)}, & y = 0 \\ \dfrac{(qC - pV) + qV\left[\dfrac{h_1(y)}{V} + \left\{1 - \dfrac{h_1(r)}{V}\right\} I_r(y)\right]}{qV + (qC - pV)}, & 0 < y \leqq r \end{cases}$$

を与える．$I_r(z)$ は $z = r$ における unit-step function.

そうすると，もし $0 \leqq \dfrac{C}{V} \leqq \dfrac{q}{p}$ ならば，$(F^0(x), G^0(y))$ はこのゲームに対しての１つの平衡点であり

$$M_1(F^0, G^0) = \left\{1 - \frac{h_1(r)}{V}\right\}\left\{1 - \frac{h_2(r)}{V}\right\}(pV - qC) \ ;$$

$$M_2(F^0, G^0) = \left\{1 - \frac{h_1(r)}{V}\right\}\left\{1 - \frac{h_2(r)}{V}\right\}(qV - pC) \ .$$

もし $\frac{q}{p} < \frac{C}{V} \leqq \frac{p}{q}$ ならば，$(F^0(x), G^1(y))$ がこのゲームに対する1つの平衡点となり

$$M_1(F^0, G^1) = V \ ; \quad M_2(F^0, G^1) = 0.$$

さらに，もし $\frac{C}{V} > \frac{p}{q}$ とすると，$(F^0(x), G^1(y))$，$(F^1(x), G^0(y))$，および $(F^*(x), G^*(y))$ のそれぞれが1つの平衡点を形成し

$$\begin{cases} M_1(F^0, G^1) = V \\ M_2(F^0, G^1) = 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} M_1(F^1, G^0) = 0 \\ M_2(F^0, G^1) = V \end{cases}, \text{ および}$$

$$\begin{cases} M_1(F^*, G^*) = \dfrac{p(qC - pV)[pV(V+C) - q\{V - h_1(r)\}\{V - h_2(r)\}]}{\{pV + (pC - qV)\}\{qV + (qC - pV)\}} \\ M_2(F^*, G^*) = \dfrac{q(pC - qV)[qV(V+C) - p\{V - h_1(r)\}\{V - h_2(r)\}]}{\{pV + (pC - qV)\}\{qV + (qC - pV)\}} \end{cases}$$

が得られる。▥

4. 簡単な例

簡単な例として，$p = q = \frac{1}{2}$，$h_1(z) = h_2(z) = z$ の時を考える。この場合，$u_1 = u_2 = u = V$ となるので，以下のような結果を得る。

(i) $r \geqq V$ の場合。

$$F^0(x) = G^0(x) = \begin{cases} x/V, & 0 \leqq x \leqq V \\ 1, & x > V \end{cases}$$

が平衡混合戦略であり，対応する平衡値は

$$M_1(F^0, G^0) = M_2(F^0, G^0) = 0$$

となる。この戦略は生物進化のゲームにおける ESS となっている。また，上記の結果は，競争入札問題における highest bid wins モデルの解と一致している。

(ii) $r < V$ の場合。

$$F^0(x) = G^0(x) = \frac{x}{V} + \left(1 - \frac{x}{V}\right) I_r(x), \quad 0 \leqq x \leqq r$$

$$F^1(x) = G^1(x) = 1, \quad 0 \leqq x \leqq r$$

$$F^*(x) = G^*(x) = \begin{cases} 1 - \frac{V}{c}, & x = 0 \\ 1 - \frac{V}{c}\left[1 - \left\{\frac{x}{V} + \left(1 - \frac{x}{V}\right) I_r(x)\right\}\right], & 0 < x \leqq r \end{cases}$$

が得られ

$$\begin{cases} M_1(F^0, G^1) = V \\ M_2(F^0, G^1) = 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} M_1(F^1, G^0) = 0 \\ M_2(F^1, G^0) = V \end{cases}, \quad かつ$$

$$M_1(F^*, G^*) = M_2(F^*, G^*) = \frac{1}{2}(c - V)\left\{\frac{V}{c}\left(1 + \frac{V}{c}\right) - \left(\frac{V - r}{c}\right)^2\right\}$$

と計算される。上記の戦略も ESS となっている。

参考文献

[1] Y. Teraoka, A game theory for a duopolistic territory, Preceeding of Australia-Japan Workshop on Stochastic Models in Engineering, Technology & Management (1993), to appear.